0.1 Exact category and Grothendieck group

Definition 0.1.1

$\mathcal{A}$ が additive category で、exact sequence と呼ばれる $\mathcal{A}$ の sequence（$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$）の class である E が与えられ、次の条件を満たすとき、$\mathcal{A}$ は exact category with E と呼ぶ。

1. exact sequence と同型な sequence は exact である。ただし、sequence というのは言い換えれば、functor category の $\mathcal{A}^{\{a\longrightarrow b\longrightarrow c\}}$ の元なので、ここにおける同型という意味である。もっと言えば３つの isomorphism で図式を可換にするということである。

2. 任意の $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ に対し、

$$X \xrightarrow{1,0} X \oplus Y \xrightarrow{pr_2} Y$$

は exact である。

3. $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Z$ が exact のとき、i は j の kernel であり、j は i の cokernel である。

4. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ が admissible epimorphism（monomorphism）とは、$Z \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$（$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow W$）という exact sequence が存在するときのことをさす。このとき、addmissible epimorphism（monomorphism）は合成と (co)based change で閉じている。

5. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ が (co)kernel をもち、$g : Z \longrightarrow X$（$X \longrightarrow W$）で $f \circ g$（$g \circ f$）が admissible epi(mono)morphism ならば、f も adomissible epi(mono)morphism である。

Example 0.1.2

$\mathcal{A}$ を abelian category としたとき short exact sequence により exact category となる。

Example 0.1.3

$\mathcal{D}$ を triangulated category とすると、distingulish triangle である $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ に対し、$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ を exact sequence として exact category となる。

Definition 0.1.4

$\mathcal{A}$ を exact category とする。このとき、$\mathcal{A}$ の grothendieck group とは ob($\mathcal{A}$) の同型類が集合となるときそれを $[\mathcal{A}]$ とおき、これから生成される自由アーベル群を $F[\mathcal{A}]$ と書くことにする。また、

$$E[\mathcal{A}] = \{[X] - [Y] + [Z] \in F[\mathcal{A}] \mid X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \text{ is exact in } \mathcal{A} \}$$

とおき、$E[\mathcal{A}]$ から生成される $F[\mathcal{A}]$ の部分群を $F_E[\mathcal{A}]$ と書いて、

$$K(\mathcal{A}) = F[\mathcal{A}]/F_E[\mathcal{A}]$$

によって定義する。

Lemma 0.1.5

$\mathcal{A}$ を exact catgeory としたとき、任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対し、$[X \oplus Y] = [X] + [Y]$、$[-X] = -[X]$ in $K(\mathcal{A})$

proof)　　$X \longrightarrow X \oplus Y \longrightarrow Y$、$X \longrightarrow X \longrightarrow 0$ の exact sequence があるのだから成り立つ。

□

Lemma 0.1.6

$(\mathcal{D}, [1])$ を triangulated category としたとき、$[X[1]] = -[X]$ in $K(\mathcal{D})$

proof)　　$X \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$ という distingulish triangle があり、それをずらした

$$X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow \Sigma X$$

も distingulish triangle となる。よって、$X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$ が exact sequence なので、$[X[1]] = -[X]$ in $K(\mathcal{D})$

□

Definition 0.1.7

$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を exact category 間の functor としたとき、これが exact functor であるとは、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が $\mathcal{A}$ の exact sequence としたとき、$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ も $\mathcal{B}$exact sequence になることである。

exact functor である $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ は grothendieck group 間の準同型 $K(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{B})$ を導く。つまり、

$$K : \{\text{exact category と exact functor からなる category}\} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

という functor である。

Theorem 0.1.8

$\mathcal{A}$ を ablian category とするとこれは exact category であり、$\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ も triangulated category なので exact category である。このとき、natural isomorphism

$$K(\mathcal{A}) \cong K(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$$

が存在する。

proof) $i_j : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ を inclusion as j-complex とする。つまり、$X \in \mathcal{A}$ に対し、$i_0(X) = X^* = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^0 = X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$ という 0 次のみ X の complex を対応させる。i_0 は明らかに exact functor であるので

$$K(i_0) : K(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$$

を導く。これより natural は満たされ、あとはこれが同型であることを示す。そのために inverce を構成する。

$$f : K(\mathcal{D}^b(\mathcal{A})) \longrightarrow K(\mathcal{A})$$

を、$X = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0 \cdots \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ に対し、$[X]$ をその同型類とする。同型類から生成されるのだからとりあえずこの行き先を定めればよい。そこで、

$$f[X] = \Sigma_{j=0}^n (-1)^j [X^j]$$

とすれば well definded な準同型となる。このとき、合成 $f \circ K(i_0) = 1_{K(\mathcal{A})}$ となることは簡単に分かる。問題は逆である。

$$K(i_0) \circ f : K(\mathcal{D}^b(\mathcal{A})) \longrightarrow K(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$$

を考える。$X = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \longrightarrow 0 \cdots \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ に対し、$[X] \in K(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$ の移り変わりを見ればよい。そこで、$H^*(X) \in K(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$ を 0 を boundary とした complex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^0(X) \longrightarrow H^1(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

により定義すると、$[X] = [H^*(X)]$ in $K(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$ である。また、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^0 = H^0(X) \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^0/\mathrm{Ker}d^0 \cong \mathrm{Im}d^0 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}d^0 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^1 \longrightarrow H^1(X) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^1 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^1/\mathrm{Ker}d^1 \cong \mathrm{Im}d^1 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}d^1 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^2 \longrightarrow H^2(X) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^2 \longrightarrow X^2 \longrightarrow X^2/\mathrm{Ker}d^2 \cong \mathrm{Im}d^2 \longrightarrow 0$$

という $\mathcal{A}$ の exact sequence を考えると、これは $K(\mathcal{A})$ において、

$$[X^0] = [H^0(X)] + [\mathrm{Im}d^0]$$
$$0 = -[\mathrm{Im}d^0] - [H^1(X)] + [\mathrm{Ker}d^1]$$
$$-[X^1] = -[\mathrm{Ker}d^1] - [\mathrm{Im}d^1]$$
$$0 = [\mathrm{Im}d^1] + [H^2(X)] - [\mathrm{Ker}d^2]$$
$$[X_2] = [\mathrm{Ker}d^2] + [\mathrm{Im}d^2]$$

ということであり、これを n まで繰り返し、両辺を足すと残るのは、

$$\Sigma_{j=0}^{n}(-1)^j[X^j] = \Sigma_{j=0}^{n}[H^j(X)]$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
K(i_0) \circ f[X] &= K(i_0)\left(\Sigma_{j=0}^{n}(-1)^j[X^j]\right) \\
&= \cdots 0 \longrightarrow \Sigma_{j=0}^{n}(-1)^j[X^j] \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
&= \cdots 0 \longrightarrow \Sigma_{j=0}^{n}(-1)^j[H^j(X)] \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
&= \oplus_{j=0}^{n}(-1)^j K(i_0)[H^j(X)] \\
&= \oplus_{j=0}^{n}(-1)^j[i_0(H^*(X)[-j])] \\
&= \oplus_{j=0}^{n} K(i_j)[H^*(X)] = [H^*(X)] = [X]
\end{aligned}$$

$\square$